

【 数学－ 1 】

以下の問に答えよ。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ である。

問 1 複素数 $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) のとき、 $\frac{1}{6\cos \theta + 10}$ を z で表せ。

問 2 複素関数 $f(z) = \frac{-i}{3z^2 + 10z + 3}$ を、複素平面上の任意の単一閉曲線 C に沿って積分せよ。

問 3 実積分 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{6\cos \theta + 10}$ を求めよ。

【 数学－ 2 】

以下の問に答えよ.

問 1 xy 正規直交座標系上で全微分可能な関数 $z = f(x, y) = xy \sin(xy)$ について,

点 $A_0(1, \pi/2)$ における z の全微分を求めよ.

問 2 次の微分方程式を解け.

$$x + 3y + 1 = (x + 3y - 1) \frac{dy}{dx}$$

問 3 公式 $\text{rot}(f\vec{F}) = (\nabla f) \times \vec{F} + f(\text{rot } \vec{F})$ を使って, $\vec{F} = -3x^2z\vec{i} - y^2z\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$, $f = x^2yz$ のと

きの $\text{rot}(f\vec{F})$ を求めよ. ただし, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ は xyz 正規直交座標系の単位基底ベクトルである.

【 物理－1 】

図1に示すように、質量を無視できる長さ a の棒の一端が点 A に固定され、他端 B に質量 m の質点を持ち、鉛直面内で運動している単振り子を考える．以下の問に答えよ．ただし、重力加速度の大きさを g とし、棒が鉛直方向下向きとなす角を θ とする．なお、 θ は小さいとする近似は用いないとし、摩擦や空気抵抗は無視できるとする．

問1 θ に関する運動方程式を求めよ．

問2 $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a} \cos \theta + 2E$ と表すことができることを示

せ．ここで、 $\dot{\theta} = d\theta/dt$ であり、 t は時間を表す．また E は任意の定数とする．

問3 問2において $E = g/a$ であるとき、 t と θ の関係式を求め、 θ が $\pm\pi$ に近づくときの質点の運動を説明せよ．ただし、 $t = 0$ のとき、 $\theta = 0$ とする．なお、

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \text{ を使ってもよい.}$$

問4 問2において $E < g/a$ および $E > g/a$ であるとき、それぞれの場合の質点の運動を定性的に説明せよ．

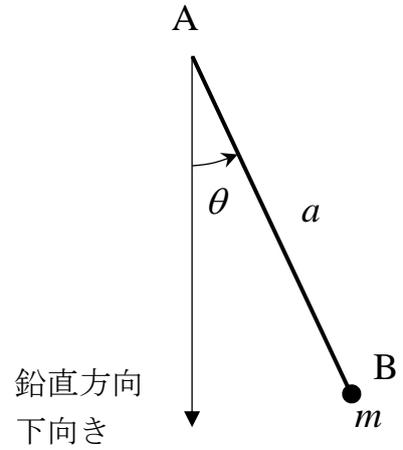


図1

【 物理－ 2 】

1次元において、無限に深い井戸型ポテンシャル $V(x)$ に閉じ込められた質量 m の電子を考える。ただし、 $V(x)$ は次式で与えられるとする。

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -L \leq x \leq L \\ +\infty & x < -L, L < x \end{cases}$$

以下の問に答えよ。

- 問1 規格化条件を考慮して、シュレディンガー波動方程式の定常状態における固有値 ε_n と固有波動関数 ψ_n を求めよ。ただし $n=1, 2, 3, \dots$ 、プランク定数を h とし、 $\hbar = h/2\pi$ と定義する。
- 問2 固有状態の異なる波動関数は互いに直交することを $n=1$ と $n=2$ の場合を用いて具体的に示せ。
- 問3 時刻 $t=0$ の全波動関数が $\Psi(x, 0) = (1/\sqrt{2})\psi_1(x) + (1/\sqrt{2})\psi_2(x)$ のように、 ψ_1 と ψ_2 の1:1の重ね合わせであったとする。その時間発展 $\Psi(x, t)$ の式を示せ。
- 問4 領域 $0 \leq x \leq L$ における粒子の存在確率を

$$P_+(t) = \int_0^L |\Psi(x, t)|^2 dx$$

とする。 $P_+(t)$ の時間変化を計算し、その物理的意味を述べよ。

【 化学－ 1 】

液体に不揮発性の物質を溶かして溶液を形成すると、蒸気圧が降下、沸点が上昇、凝固点が降下する。そのとき、蒸気圧降下、沸点上昇および凝固点降下の変化量は溶質の種類には関係なく、溶質のモル濃度によってのみ決まる。以下の問に答えよ。

計算において、溶媒については Raoult 則が成立するものとする。原子量は C : 12.0, H : 1.0, O : 16.0, Ca : 40.0, Cl : 35.5 とする。計算の答は有効数字 3 桁まで求めよ。

- 問 1 溶液の蒸気圧降下、沸点上昇および凝固点降下の現象を化学ポテンシャル、活量と相平衡の関係から説明せよ。
- 問 2 アセトン (C_3H_6O) の蒸気圧は $30^\circ C$ で 40.0 kPa である。いま、 5.0 g の不揮発性溶質を 116.0 g のアセトンに溶かしたところ、蒸気圧は 39.0 kPa になった。その溶質の分子量を求めよ。
- 問 3 水の凝固点降下係数は H_2O 1 kg あたり $K_f = 1.80 \text{ K} \cdot \text{mol}^{-1}$ である。最低気温 $-6.0^\circ C$ の地方で $CaCl_2$ の水溶液を融雪剤として散布する場合の $CaCl_2$ 水溶液の最低濃度を質量パーセントで求めよ。ただし、 $CaCl_2$ は完全に溶解し、イオン（カチオン、アニオン）間の相互作用は無視してよいとする。
- 問 4 凝固点降下は溶質の種類には関係なく溶質のモル濃度によってのみ決まることについて、必要な式を導いて説明せよ。なお、必要であれば、Gibbs-Helmholtz の式、 $\left\{ \partial (G/T) / \partial T \right\}_P = -H/T^2$ を利用せよ。

【 化学－ 2 】

ディーゼルエンジンの理論サイクルであるディーゼルサイクルに関して、以下の問1から問4に答えよ。ここで、空気を作業物質であると考え、空気は理想気体と仮定する。また、内燃機関は閉鎖系と考え、全ての過程は準静的に進行する。このとき、ディーゼルサイクルは以下の過程からなる。

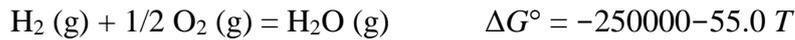
- (1) A → B 空気の圧縮 (断熱可逆圧縮過程)
- (2) B → C 燃焼 (等圧加熱膨張過程)
- (3) C → D 空気の膨張 (断熱可逆膨張過程)
- (4) D → A 排気 (等積冷却過程)

ただし、燃焼の過程は外部からの加熱の過程と考え、排気の過程は外部への放熱の過程と考える。また、状態Aの体積を V_A 、圧力を P_A 、温度を T_A とし、状態Bの体積を V_B 、状態Cの体積を V_C とする。空気の定圧熱容量を C_P 、定積熱容量を C_V とし、解答に使用する記号として、空気の熱容量比 $\gamma=C_P/C_V$ 、圧縮比 $\varepsilon=V_A/V_B$ 、噴射締切比 $\sigma=V_C/V_B$ を用いよ。また、内燃機関内の空気は1モルとする。

- 問1 ディーゼルサイクルの状態B、状態C、状態Dの圧力を、 P_A 、 γ 、 ε 、 σ を用いて表せ。また、ディーゼルサイクルの過程における圧力と体積の関係を示すグラフを描け。
- 問2 ディーゼルサイクルの状態B、状態C、状態Dの温度を、 T_A 、 γ 、 ε 、 σ を用いて表せ。
- 問3 状態A→状態Bの過程のエントロピーの変化量 ΔS_{A-B} 、状態B→状態Cの過程のエントロピーの変化量 ΔS_{B-C} 、状態C→状態Dの過程のエントロピーの変化量 ΔS_{C-D} を、 C_P 、 C_V 、 γ 、 ε 、 σ を用いて表せ。また、ディーゼルサイクルの過程における温度とエントロピーの関係を示すグラフを描け。
- 問4 ディーゼルサイクルの熱効率を、 γ 、 ε 、 σ を用いて表せ。また、熱効率を上げる方法を説明せよ。

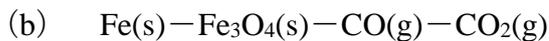
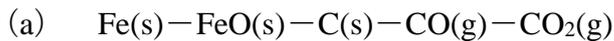
【 材料化学－ 1 】

酸化鉄の還元平衡に関して，以下の間に答えよ．ただし，固相の活量は全て1と仮定し，各反応の標準Gibbs自由エネルギー変化 $\Delta G^\circ [\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}]$ は次を使用せよ．答の有効数字は2桁とし，計算過程も記述すること．



なお，気体定数 $R = 8.31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ ， $\ln 10 = 2.30$ ， $e = 2.72$ ， $e^{9.71} = 1.65 \times 10^4$ ， $e^{9.76} = 1.73 \times 10^4$ ， $e^{11.3} = 8.08 \times 10^4$ ， $18.3^{0.5} = 4.28$ とするが，指数，対数，平方根，べき乗を伴う計算については，それらの表記を残したまま解答してもよい．

問1 次の各系が平衡状態にあるとき，それぞれのGibbsの相律における自由度を求めよ．



問2 $\text{C (s)} + \text{CO}_2 \text{ (g)} = 2\text{CO (g)}$ は Boudouard 反応と呼ばれ，高炉内における鉄鉱石類の還元過程に重要な役割を果たしている．この反応に関する $\Delta G^\circ [\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}]$ と温度 $T [\text{K}]$ の関係を示せ．また， $P_{\text{CO}} + P_{\text{CO}_2} = 1 \text{ atm}$ ， $T = 1020 \text{ K}$ のときのCO分圧 [atm]を求めよ．

問3 1 atm，1680 Kにおいて， $\text{CO}_2 \text{ (g)} - \text{CO (g)} - \text{H}_2\text{O (g)} - \text{H}_2 \text{ (g)}$ 混合ガスの平衡酸素分圧が 10^{-14} atm であるとき，この状態のガスと平衡する鉄はどのような状態にあるか．また，この混合ガスの $\frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}}$ ， $\frac{P_{\text{H}_2\text{O}}}{P_{\text{H}_2}}$ の値はそれぞれいくらか．

【 材料化学－ 2 】

四価の金属イオン M^{4+} と酸化物イオン O^{2-} からなるイオン結合性の酸化物 MO_2 について、以下の問に答えよ。なお、この酸化物ではイオン欠陥としては酸化物イオンのフレンケル型欠陥（酸化物イオン空孔と侵入型酸化物イオン）のみを考えればよいとする。

問 1 以下の(a)～(d)に示す欠陥生成反応と欠陥濃度の電気的中性条件に関する式を Kröger-Vink の記述法により記せ。

- (a) 酸化物イオンのフレンケル型欠陥の生成反応式
- (b) 還元に伴う酸化物イオン空孔の生成反応式
- (c) 電子—正孔対の生成反応式
- (d) 欠陥濃度の電気的中性条件式

問 2 この酸化物のある温度 T_1 [K]における欠陥平衡を考える。酸素分圧 P_{O_2} が 1×10^{-10} atm において、この酸化物はイオン欠陥、電子欠陥ともに化学量論的(ストイキオメトリック)であり、酸化物イオン空孔濃度は $1 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ 、電子濃度は $2 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ であった。この温度 T_1 [K]で酸素分圧を 1×10^{-24} atm としたときの酸化物イオン空孔、侵入型酸化物イオン、電子、正孔の各濃度 [cm^{-3}]を求めよ。

問 3 この酸化物の M^{4+} の一部を三価の金属イオン X^{3+} で置換した。この X^{3+} の濃度を $2 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ としたところ、温度 T_1 [K]、酸素分圧 P_{O_2} が 1×10^{-10} atm において X^{3+} は全て酸化物イオン空孔の生成により電荷補償された。この温度 T_1 [K]での各欠陥の生成反応の平衡定数は問 2 と同じとして、酸素分圧が 1×10^4 atm における各欠陥の濃度 [cm^{-3}]を求めよ。

問 4 問 3 に示した M^{4+} の一部が三価の金属イオン X^{3+} で置換された酸化物において、温度を T_2 [K]にしたところ、酸素分圧 P_{O_2} が 1×10^{-20} atm から 1 atm の範囲で、酸化物イオン空孔の電気伝導度が $0.1 \text{ S} \cdot \text{cm}^{-1}$ となり、電子および正孔の電気伝導度は無視できるほど小さくなった。この酸化物の工業的な応用例を 2 つあげよ。

【 材料物性－ 1 】

図 1 に示したCr-Ni 2 元系状態図について，以下の問に答えよ．

問 1 図中の X_1 と X_2 の各組成において，液体単相領域から合金を徐冷した．図中に示したa, b, c, d, A, B, C, Dの各温度におけるマイクロ組織の概略図を描き，組織の相構成と形態について説明せよ．特に X_2 組成のC点では，反応初期と反応後期の組織変化に留意して図を描きなさい．

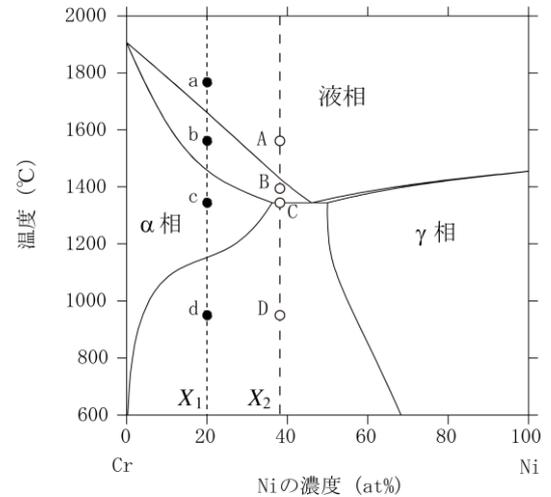


図 1 Cr-Ni 2 元系状態図

問 2 ニクロム線は 20mass%Cr - 80mass%Ni（ここで，mass%は質量パーセントを表す．図 1 の横軸とは異なるので注意せよ）の組成をもつ単相の固溶体で，結晶構造はfcc（図中の γ 相），格子定数は0.357 nmである．この合金の密度 $[g \cdot cm^{-3}]$ を有効数字 2 桁で求めよ．ただし，原子量はCrが52，Niが59であり，またアボガドロ定数は $6.02 \times 10^{23} [mol^{-1}]$ とする．

問 3 60at%Cr - 40at%Ni合金（ここでat%は原子パーセントを表す）はCrを主成分とするbcc固溶体（図中の α 相）とNiを主成分とするfcc固溶体（図中の γ 相）から構成される二相合金であり，1000°Cで平衡させた後に常温まで急冷して各相の組成と結晶構造を調べたところ， α 相は93at%Cr - 7at%Ni， γ 相は45at%Cr - 55at%Ni，格子定数は α 相が0.287 nm， γ 相が0.357 nmであった．この合金の常温における密度 $[g \cdot cm^{-3}]$ を有効数字 2 桁で求めよ．なお原子量とアボガドロ定数は問 2 と同じ値を用いよ．

【 材料物性－ 2 】

析出物を含まない初期粒径 $100\ \mu\text{m}$ 、転位密度 $1.0 \times 10^{10}\ \text{m}^{-2}$ の純ニッケルの高強度化を図りたい。以下の問に答えよ。純ニッケルの格子定数 a は $0.352\ \text{nm}$ 、剛性率 G は $76\ \text{GPa}$ とし、 $\sqrt{2} = 1.4$ を用いよ。

- 問 1 室温でニッケルに対して塑性加工を施して、転位密度を $1.0 \times 10^{14}\ \text{m}^{-2}$ まで増加させたとき、変形応力はいくら増加するか求めよ。ただし、塑性加工中、回復や再結晶は生じていないものとする。転位密度 $\rho\ [\text{m}^{-2}]$ と変形応力 $\sigma\ [\text{MPa}]$ の関係として、以下の式を用いよ。なお、 σ_0 は定数、 b はバーガースベクトルの大きさであり、ニッケル中には完全転位のみが分布すると仮定してよい。

$$\sigma = \sigma_0 + 0.3Gb\sqrt{\rho}$$

- 問 2 一般的に結晶粒径 $d\ [\mu\text{m}]$ と降伏応力 $\sigma_y\ [\text{MPa}]$ の関係はホール・ペッチ則にしたがう。
- (a) σ_y と d の関係式を示し、この関係が成立する理由を述べよ。
- (b) 純ニッケルの結晶粒を微細化することだけで、問 1 で得られた強度上昇を達成するには粒径を何 μm にすればよいか答えよ。なお、純ニッケルのホール・ペッチ係数は $180\ \text{MPa} \cdot \mu\text{m}^{-1/2}$ とする。
- 問 3 (a) オロワン機構による強化メカニズムについて説明せよ。

- (b) 平均粒子間距離が $1\ \mu\text{m}$ の転位が横切ることのできない微粒子を純ニッケルに分散させたとき、 $19\ \text{MPa}$ の強度上昇がもたらされたとする。転位が横切ることのできない半径 $100\ \text{nm}$ の球状微粒子を純ニッケル母相中に均一に分散させ、分散強化のみで問 1 で得られた強度上昇を達成するには、球状微粒子の体積率 f をいくらにすればよいか答えよ。半径 r の球状微粒子が体積率 f で均一に分散した場合、平均粒子間距離 L は r と f を用いて、 $L = r\sqrt{2/f}$ で近似できる。

【 材料加工-1 】

図1に示すように、高さ h 、幅 b の長方形断面をもつ長さ l の単純支持はりを考え、左端 A を原点として、はりの軸方向右向きに x 軸、鉛直方向下向きに y 軸をとる。支点 A から距離 l_1 、 $l_1 + l_0$ の位置 C 、 D に作用している集中荷重を $P/2$ 、区間 DB の距離を l_2 、はりの材料の縦弾性係数を E 、許容応力を σ_a とし、以下の間に答えよ。ただし、はりの質量は無視できるものとする。

問1 支点 A 、 B における反力を求めよ。

問2 区間 CD のせん断力が 0 になるとき、任意の位置 x における断面に生じる曲げモーメント M を求めて、曲げモーメント図を描け。またこのとき、はりに作用する垂直応力が最大となる位置 x を定めよ。

問3 $l_1 = l_2 = l/2$ ($l_0 = 0$) のとき、はり中央に加えることのできる最大荷重を求めよ。また、最大荷重を作用させたときのたわみ曲線を決定せよ。

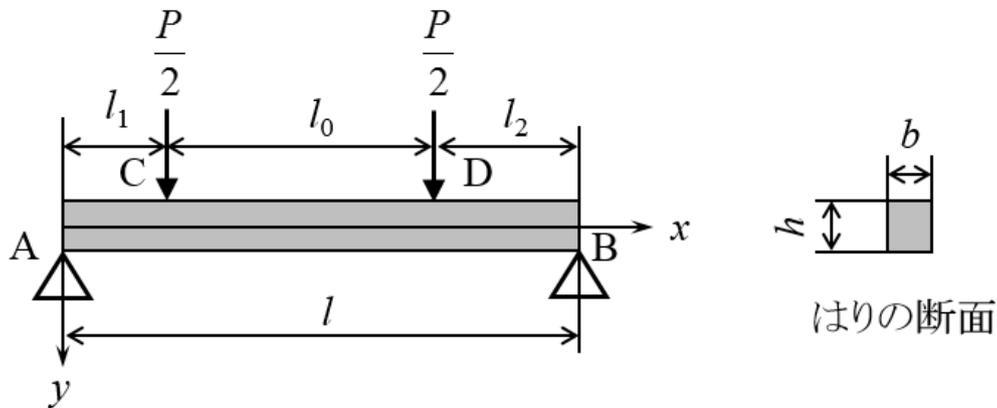


図1

【 材料加工-2 】

図 1 はある合金の高温圧縮試験により得られた真応力-真ひずみ曲線を示したものであり、一定ひずみ速度 (10 s^{-1}) において、1323 K から 50 K ごとに 1473 K までの温度での試験結果である。圧縮試験後の試験片にはき裂などが生じておらず、得られた真応力-真ひずみ曲線は合金試料の塑性変形挙動を現わしていると考えることができる。このような変形挙動を示す合金の熱間加工挙動について、以下の二つの問に答えよ。

- 問 1 図 1 に示される真応力-真ひずみ曲線の変形初期から最終段階に至る変形過程において、変形中に予測される金属組織変化について述べよ。なお、初期の結晶粒径はどの試料においても同じであるとする。
- 問 2 図 1 に示される真応力-真ひずみ曲線を取得した合金のある温度における引張変形挙動の真応力 (σ_t) -真ひずみ (ϵ) の関係を求めたところ、次式で与えられることが判明した。

$$\sigma_t = 780 \epsilon^{0.2} \text{ [MPa]}$$

この合金の引張り強さを上式より求めよ。なお、指数や対数の数値を求める必要が生じた場合は、指数、対数のまま示してもよい。

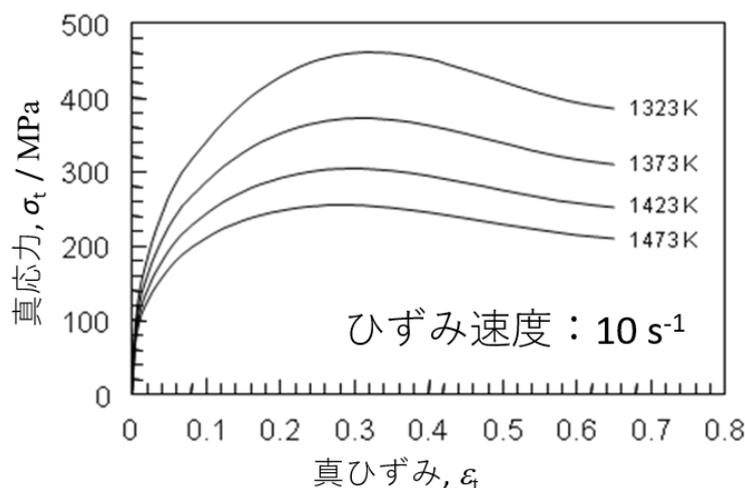


図 1 高温での圧縮による真応力-真ひずみ曲線。