

量子力学の表現方法には、二種類の表し方があります。一つはシュレジンガーによる波動力学的な表現、もう一つはハイゼンベルグによる行列表現を使ったマトリックス力学の表現です。シュレジンガーの波動力学的表現が直感的に分かりやすいために、この講義でも波動力学の表現で最初は進めますが、どちらも同じことを言っています。離散化された関数は、行列表現できるからです。

【光の粒子性】

簡単に光の粒子性を復習します。光の波長 (λ :ギリシャ語のラムダ) と周波数 (f)あるいは振動数

(ν :ギリシャ語のニュー) との関係は、 $\lambda[m] = \frac{300}{f[MHz]}$ ここで MHz (メガ・ヘルツ) とは 10^6Hz

のことで、1000 倍周波数が高くなるに従って、 $10^9\text{Hz}=\text{GHz}$ (ギガ・ヘルツ)、 $10^{12}\text{Hz}=\text{THz}$ (テラ・ヘルツ)・・・と書きます。一般的には、

$$\lambda[m] = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 [m/s]}{f [1/s]} \equiv \frac{3 \times 10^8 [m/s]}{\nu [1/s]} \quad \text{ここで } c \text{ は真空中の光速です。}$$

これは光の波としての性質を示すものですが、先週お話した、ある特定のエネルギー以上の光を金属に当てると金属から電子が飛び出す現象 (光電効果) や、光の一種で更に波長が短い (= 周波数が高い) X 線を原子に当てると、波長が違う X 線が出てくる現象 (コンプトン散乱) から、光があるエネルギーを持った塊として電子に作用する、光量子仮説が考えられました。量子とは、電波や光の波長のように連続的に変化するのではなく、ある一定の値の整数倍で何かが存在する基本単位のことを言います。

そこで、光のいわば粒子性を示す、光のエネルギーと周波数あるいは振動数との関係は、 $E = h\nu$ で得られます。ここで h は光量子仮説を唱えたプランクの名前がついている、プランク定数といい、 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ という値がコンプトン散乱の実験から実験的に得られています。

【ド・ブroy波】

電子は普通、古典的な考えでは粒子として考えられます。しかし、その粒子性では説明できない物質波という仮説がド・ブroyによって出されました。この仮説によると、電子のような物質も、波の性質を伴っていて、干渉つまり二つ以上の波の「うなり」が生じるというものです。

光は波ですから、例えば二つの狭いスリットを通して二種類の光を干渉させると、スリットの間の距離を $x_1 - x_2$ とし、 $x_1 - x_2 = n\lambda$ という関係を満たすときに、二つの光は強め合い、

$x_1 - x_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ のときに弱めあう、干渉が生じます。そしてスリットの間の距離が波長 λ に近

いと、その干渉効果は最もよく現れます。

これは波である光の実験でしたが、粒子である電子でも同じように干渉効果が現れることが実験的に確かめられました。つまり粒子である電子も波としての性質を持つことが示されたのでした。これは実際現代では、材料を原子スケールで観察する電子顕微鏡や、表面の原子の並び方を見ることが出来る電子線回折などで使われています。

【電子波の干渉】

このような干渉は、光や電波のような波で生じるのはよく理解できますが、電子という通常は粒子と考えられるものでも生じることが実験で観察されます。実際に実験してみると、次のような結果が得られます。

1. 光で二つのスリットを使った実験と同じように電子線でも干渉による縞模様^{しま}ができます。光（可視光）と違って、電子を目で見ることはできないので、特殊な蛍光板を使います。つまり、電子が当たると光が生じる板を使って目に見えるものにします。テレビのブラウン管（死語かも知れませんが）と同じ原理です。しかしこれも量子効果のひとつです。
2. 二つのスリットの内、一つを閉じると、つまり一つのスリットからだけ電子がでるようにすると、干渉縞はできません。
3. 加速する電圧（電界）を変えて電子の運動エネルギーを変えると縞模様の間隔が変わります。
4. スリットの間隔^{すきま}や、二つのスリットの間隔を広くすると、縞模様が消えます。

電子の運動エネルギーは、古典的な電子という粒子に対する古典的なニュートン力学から

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \quad \text{つまり} \quad p = \sqrt{2mE} \quad \text{で与えられます。ここで } E \text{ は電子のエネルギーですから、}$$

加速電圧になります。 p は運動量、 $m=9.11 \times 10^{-31}[\text{kg}]$ は電子の質量です。

これら 1 から 4 の結果を無理なく説明する唯一の答えは、電子は干渉が起きるような微小な空間では「粒子」ではなく、「波」の性質を持つ・・・というものです。つまり電子は波である。

この考えは、歴史的には 1923 年にド・ブロイによって「物体の運動に伴った仮想的な波」すなわち物質波として提案されました。ド・ブロイによると、物質に伴う波の「群速度」は物質の速度

に等しく、その波の波長は $\lambda = \frac{h}{p}$ で与えられる・・・というものです。ここで h はプランク定数

で、 p は物質の運動量です。

ここで「波の群速度」という言葉が出てきました。これは次回、波について詳しく述べることとして、ここでは簡単に、「波の塊」が進む速さと理解してください。「群速度」とわざわざ「群」を付けたのですから、他にも波の速度には、もう一つの速度があります。これは「位相速度」というものです。いわば波の強弱が進む速度を言います。いわゆる光速 c は光の位相速度です。

このド・ブロイ波の波長と運動量の関係は、光の運動量の関係と同じものです。つまり、光に質量がなく ($m=0$)、速度が c (この c は光の位相速度です) であることから、相対論的エネルギーの式から、

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}, \quad p = \frac{E}{c}, \quad v \equiv f \lambda = \frac{c}{\lambda}, \quad \omega = 2\pi f \quad \text{ですから、}$$

$$p = \frac{h\omega}{c} = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi v}{c} = h \frac{v}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

となり、これはド・ブロイの関係式と同じものになります。ここで ω は角周波数^{オメガ}と言い（ギリシャ語のオメガと読みます）、 $\omega \equiv 2\pi f \equiv 2\pi v$ です。そして h （エイチ・バーと読みます）も h と同じく、「プランク定数」と言い、

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = \frac{6.6260 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2\pi} = 1.0546 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad \text{という値を持ちます。今後良く使う数値です。}$$

ド・ブロイの物質波の例題を示します。 例題ド・ブロイ

【単位系について】

物理で使う単位系について、お話しておきます。はじめの「固有の名称を持つ SI 組立単位」という表をみてください。サイエンス（科学）は数の学問ですから、自然界の現象を出来るだけ何らかの数値で表そうとします。何らかの現象を数値で表せたとき、サイエンスとなる・・・と言ったのは、ケルビン卿という熱力学の創始者です。ケルビンが絶対温度の単位 [K] になっています。

例えば、長さを表すときには、1 m でもよいし、100 cm でもよし、3 尺三寸といっても同じことです。重さは 1 kg でも 1000 g でもポンドでもよいです。しかしこれらをかけたり・足したり・引いたりして計算して求められる数値は、それぞれ勝手な単位を使えば、当然ばらばらの数値になりますから、混乱します。そこで、これらの単位系を国際的に統一するために、メートル条約の最高決議機関である国際度量衡総会 (Conférence Générale des Poids et Mesures / CGPM) において採択可決されたのが、**国際単位系 (Le Système International d'Unités / SI)** であり、日本でも 1974 年 4 月以降導入になりました。学術論文などは原則的に、この SI 単位系を使って書くことになっています。天気予報でも気圧をヘクト・パスカルなどと言っていますが、これも SI 単位系を使っているからです。さて、資料の最初の表をみてください。

SI 単位系では、基本単位として、長さ : m、重さ : Kg、時間 : s (秒)、電流 : A (アンペア)、温度 : K (絶対温度 : ケルビン) を使うことになっています。これらは長さの「量性」は L、重さの量性は M、時間の量性は T と表します。これらの単位は、これ以上他の単位で表すように分解できないものです。これを「素量性」といいます。その他に、光の強さ (光度) : cd (カンデラ) もの量 : mol (モル) がありますが、この講義ではあまり出てきません。

これらから計算されるエネルギーや力や圧力といった量の単位を「SI 組立単位系」といいます。また表をみてください。例を示します。表の二番目に出てくる「力 F」について話します。力の SI 単位は「N (ニュートン)」です。力は、高校の物理でも出てくるように

$$F = ma \quad (\text{ここで } m \text{ は質量、} a \text{ は加速度です。})$$

で求められます。そして加速度 a は、速度の時間微分、つまり速度は距離あるいは長さ L の微分となりますから、加速度は距離あるいは長さの時間に対する二階微分となります。

つまり $F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2L}{dt^2}$ 、これを単位で表したものを「**単位式**」と言います。つまり

$$[F] = [M][v][T]^{-1} = [M][L][T]^{-2}$$

となります。ここで [M] を質量の単位、[v] は速度の単位、[T] を時間の単位とします。

次に出てくる圧力はパスカル [P] という単位で表しますが、圧力は単位面積あたりの「力」ですから、単位式で書くと L を長さの単位とすると、

$$[P] = [F][L]^{-2} = [M][v][T]^{-1}[L]^{-2} = [M][L][T]^{-2}[L]^{-2} = [M][L]^{-1}[T]^{-2}$$

のように単位式が求められます。他の物理量も、全て SI 基本単位で表すことができるわけです。そこで、例題の単位系について解説します。

100 V で加速された電子のド・ブロイ波長を求めなさいという問題でした。

結果はこのようになります。

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.626 \times 10^{-34} [J \cdot s]}{\sqrt{2 \times 9.109 \times 10^{-31} [kg] \times 100 [V] \times 1.602 \times 10^{-19} [C]}}$$

$$= 1.2265 \times 10^{-10} [m] = 1.23 \text{ \AA} = 0.123 \text{ nm}$$

波長は長さの単位です。そして電圧 V と電荷量 C を、SI 基本単位で書き下します。

そうすると、単位式は

$$[m] = \frac{[J][s]}{\sqrt{[kg][V][C]}} = \frac{[m]^2 [kg][s]^2 [s]}{\sqrt{[kg][m]^2 [kg][s]^{-3} [A]^{-1} [s][A]}} = \frac{[m]^2 [kg][s]^1}{\sqrt{[kg]^2 [m]^2 [s]^2}} = \frac{[m]^2 [kg][s]^1}{[kg][m][s]^1} = [m]$$

が得られます。このように、単位が合っているかどうかを調べる事を **次元解析** といいます。次元解析をすると、導出された式が正しいかどうか判断できます。

来週は、今後の量子力学の説明方法である波動力学的手法を理解するために、波の基本的な性質について、少し詳しく説明します。

例題ド・ブロイ

問：100Vで加速された電子のド・ブロイ波長を求めなさい。

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.626 \times 10^{-34} [J \cdot s]}{\sqrt{2 \times 9.109 \times 10^{-31} [kg] \times 100 [V] \times 1.602 \times 10^{-19} [C]}}$$

$$= 1.2265 \times 10^{-10} [m] = 1.23 \text{ \AA} = 0.123 \text{ nm}$$

これは、X線といわれる波長の範囲になる光・電磁波です。

太陽光発電: 太陽から地球上に降り注がれる光の中心波長は大体1ミクロン程度が中心となります。これをエネルギーに換算すると大体1.23eV。太陽電池で発電をする場合、この値の禁制帯幅を持つ半導体を使うと、効率よく電圧あるいは電流が発生できます。禁制帯幅はほぼ材料で決まりますが、この値の禁制帯幅を持つ材料として、CuInS系の化合物半導体があります。これを通常、CISと呼びます。旧ソ連から分離した共和国の名前のようですが。現在は、シリコンそれも単結晶のシリコンではなくて、鑄造のような方法で作られた多結晶シリコン材料が使われています。

単位の接頭記号

名称	大きさ	記号	名称	大きさ	記号
デシ (deci)	$\times 10^{-1}$	d	デカ (deca)	$\times 10^1$	da
センチ (centi)	$\times 10^{-2}$	c	ヘクト (hecto)	$\times 10^2$	h
ミリ (milli)	$\times 10^{-3}$	m	キロ (kilo)	$\times 10^3$	k
マイクロ (micro)	$\times 10^{-6}$	μ	メガ (mega)	$\times 10^6$	M
ナノ (nano)	$\times 10^{-9}$	n	ゲ(ギ)ガ (giga)	$\times 10^9$	G
ピコ (pico)	$\times 10^{-12}$	p	テラ (tera)	$\times 10^{12}$	T
フェムト (femto)	$\times 10^{-15}$	f	ペタ (peta)	$\times 10^{15}$	P
アト (atto)	$\times 10^{-18}$	a	エクサ (exa)	$\times 10^{18}$	E

(1) SI (International System, Syst\eme International) 基本単位

量	名称	記号
長さ	メートル	m
質量	キログラム	kg
時間	秒	s
電流	アンペア	A
熱力学温度	ケルビン	K
光度	カンデラ	cd
物質	モル	mol

(2) SI 補助単位

量	名称	記号
平面角	ラジアン	rad
立体角	ステラジアン	sr

接頭記号と単位は組になっているものと考え特別なことをつけない。

(3) 固有の名称をもつ SI 組立単位

量	名称	記号	他の SI 単位による表わし方	SI 基本単位による表わし方
周波数	ヘルツ	Hz		s^{-1}
力	ニュートン	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
圧力	パスカル	Pa	N/m^2	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
エネルギー、仕事、熱量	ジュール	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
仕事率、放射	ワット	W	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
電気量、電荷	クーロン	C	$A \cdot s$	$s \cdot A$
電圧、電位	ボルト	V	W/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
静電容量	ファラド	F	C/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
電気抵抗	オーム	Ω	V/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
コンダクタンス	ジーメン	S	A/V	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
磁束	ウェーバー	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
磁束密度	テスラ	T	Wb/m^2	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
インダクタンス	ヘンリー	H	Wb/A	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
光強度	ルーメン	lm		$cd \cdot sr$
照度	ルクス	lx	lm/m^2	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$

† sr: 立体角の単位, steradian.

2.2 物理学の単位・記号に関するIUPAP¹⁾の推薦²⁾